Istituto Tecnico Industriale Statale
“EUGENIO BARSANTI”

80038 POMIGLIANO D’ARCO (NA) Via Mauro Leone, 105
Tel. (081) 8841350 - Fax (081) 8841676
Distretto scolastico n. 31 - Cod. Fisc. 80104010634
Cod.Ist. NATF040003 - Cod. Serale NATF04050C
E-mail : NATF040003@istruzione.it

Specializzazioni: Meccanica
Elettrotecnica e Automazione
Elettronica e Telecomunicazioni
Informatica –Progetto Abacus
Corso Serale: Elettrotecnica e Automazione

DIPARTIMENTO DI ELETTRONICA

Proff. Paolo Bisconti - Mariano Riccardo

SISTEMI ANALOGICI
Parte I

**APPUNTI DALLE LEZIONI
DEL CORSO DI SISTEMI**

(Revisione 2009)

Premessa

Questi appunti sono complementari al libro di testo e non intendono sostituirlo, né possono farlo, dato che ogni testo costituisce per l'allievo un riferimento indispensabile per un adeguato percorso di formazione ed apprendimento. Questo lavoro è stato realizzato esclusivamente per motivi didattici e non per scopi di lucro. Non è garantito che sia privo di errori.

MODULO 1: GRANDEZZE FISICHE

U.D. 1: GRANDEZZE VARIABILI NEL TEMPO

Detta "***g***" una ***generica grandezza fisica***, la notazione ***g(t)*** significa che ***g*** varia al variare del tempo ovvero che ***g è funzione del tempo***.
Immaginiamo che questa generica grandezza vari nel tempo secondo il grafico di Fg. 1.1. (***andamento lineare crescente***)

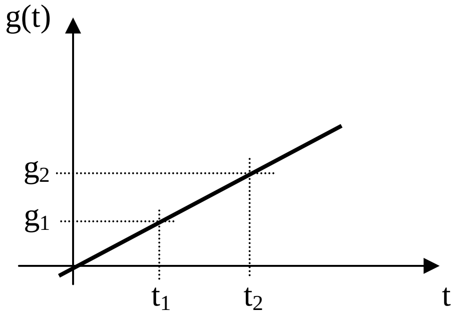


Fig. 1.1

Consideriamo due istanti di tempo successivi t_1 e t_2; in corrispondenza di t_1, la grandezza g assume il valore $\boldsymbol{g(t_1) = g_1}$ mentre in corrispondenza di t_2 assume il valore $\boldsymbol{g(t_2) = g_2}$.
Indicando con $\Delta t = t_2 - t_1$ un intervallo di tempo, in corrispondenza di esso si ottiene la variazione $\Delta g = g_2 - g_1$. La notazione $\boldsymbol{\Delta g/\Delta t}$ indica che si è avuta ***una variazione di g pari a Δg in corrispondenza dell'intervallo di tempo Δt.***
Nella Fig. 1.2 la retta che rappresenta come varia g in funzione del tempo è più ripida; si nota che a parità di intervallo di tempo Δt si ottiene una corrispondente variazione Δg maggiore; ciò significa che il valore del rapporto $\Delta g/\Delta t$ è aumentato.

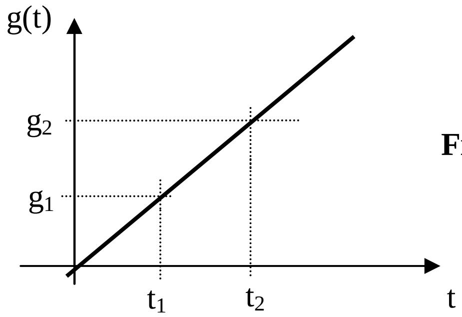


Fig. 1.2

Esempio1.1. Un forno si riscalda passando da una temperatura iniziale $T_1 = 20\ °C$ ad una temperatura finale $T_2 = 70\ °C$ in un intervallo di tempo pari a 5 minuti; ciò significa che nell'intervallo di tempo $\Delta t = 5$ *minuti* si è avuta una variazione di temperatura $\Delta T = T_2 - T_1 = 50\ °C$, ovvero:
$\boldsymbol{\Delta T / \Delta t = 50/5 = 10}$ ***°C/minuto***
Un secondo forno si riscalda passando da una temperatura iniziale $T_1 = 20\ °C$ ad una temperatura finale $T_2 = 100\ °C$ in un intervallo di tempo pari a 5 minuti; in questo secondo caso nell'intervallo di tempo $\Delta t = 5$ *minuti* si è avuta una variazione di temperatura $\Delta T = T_2 - T_1 = 80\ °C$, ovvero:
$\boldsymbol{\Delta T / \Delta t = 80/5 = 16}$ ***°C/minuto***

In termini di riscaldamento, l'innalzamento di temperatura pari a *16 °C/minuto* ***è più veloce*** rispetto a quello pari a *10 °C/minuto*
Da tale esempio se ne deduce che:
"Il valore del rapporto Δg/Δt rappresenta la velocità con la quale varia la grandezza g al variare del tempo."

Ritorniamo agli andamenti di Figg. 1.1 ed 1.2: scelto un qualsiasi intervallo di tempo *Δt*, sia *Δg* la corrispondente variazione. Se immaginiamo di raddoppiare l'intervallo *Δt*, si otterrà un raddoppio di *Δg*; in generale si può scrivere *n * Δt* → *n * Δg* (con n = numero generico). Ne deriva allora che per un andamento di ***g(t) di tipo lineare*** il rapporto ***Δg/Δt = costante = K*** . Questo significa pure che il rapporto Δg/Δt può essere calcolato senza preoccuparsi di come scegliere t_1 e t_2, in quanto il suo valore non cambia.
Altra considerazione è ottenibile dalla Fig. 1.3.

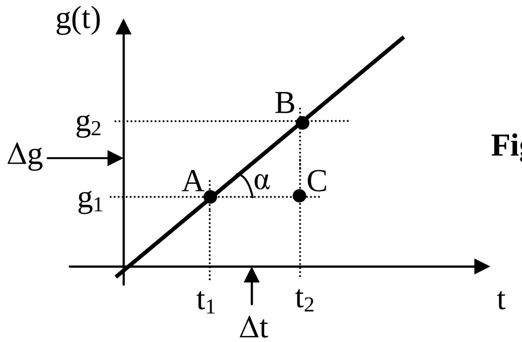


Fig. 1.3

Considerando il triangolo rettangolo ABC, si ha che $\overline{AC} = \Delta t$; $\overline{BC} = \Delta g$ e quindi $\Delta g = \Delta t * tg\,\alpha$ per la seguente proprietà dei triangoli rettangoli:
"In un triangolo rettangolo la misura di un cateto è uguale alla misura dell'altro cateto moltiplicata per la tangente dell'angolo opposto"
Si ottiene quindi $\frac{\Delta g}{\Delta t} = tg\,\alpha$, cioè:
"La velocità di variazione di g(t) è uguale alla tangente dell'angolo α"

In termini matematici ***Δg = K* Δt*** rappresenta una equazione del tipo ***y = m * x*** (equazione di una retta passante per l'origine), con m = coefficiente angolare = $\frac{\Delta g}{\Delta t} = tg\,\alpha$.
Nel caso in cui il valore assunto inizialmente dalla grandezza sia diverso da zero (vedi Fig. 1.4), la velocità di variazione è sempre $\frac{\Delta g}{\Delta t} = tg\,\alpha$, mentre l'equazione diventa ***y = m * x + n***, dove ancora $m = \frac{\Delta g}{\Delta t} = tg\,\alpha$ ed n rappresenta il valore iniziale di g(t), indicato con $g(t_0)$ o anche con g_0.

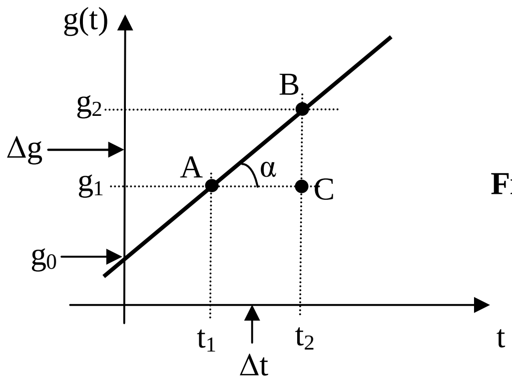


Fig. 1.4

Immaginiamo ora che la generica grandezza vari nel tempo secondo il grafico di Fg. 1.5. (***andamento lineare decrescente***)

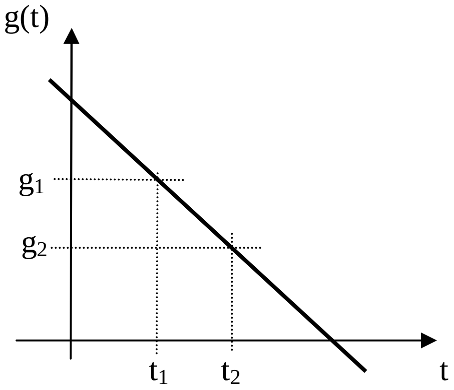


Fig. 1.5

In questo caso la velocità di variazione risulterà negativa.

Esempio1.2. In una stanza è stata spenta la stufa ed aperta la finestra, per cui la temperatura passa da un valore iniziale $T_1 = 23\ °C$ ad un valore $T_2 = 17\ °C$ in un intervallo di tempo pari a 6 minuti; ciò significa che nell'intervallo di tempo $\Delta t = 6$ *minuti* si è avuta una variazione di temperatura $\Delta T = T_2 - T_1 = 17 – 23 = -6\ °C$, ovvero:
$\boldsymbol{\Delta T / \Delta t = -6/6 = -1\ °C/min}$

Un caso particolare è quello rappresentato in Fig. 1.6: si tratta di una ***grandezza costante nel tempo***: $\boldsymbol{g(t) = K}$; è agevole capire che per tale tipo di grandezza $\Delta g/\Delta t = 0$.
Infatti: $\boldsymbol{g(t_1) = g_1}$; $\boldsymbol{g(t_2) = g_2}$ con $g_1 = g_2$ come si evince dalla Fig. 1.6; ne deriva $\Delta g = 0$ per cui $\Delta g/\Delta t = 0$
Una grandezza fisica costante nel tempo ha una velocità di variazione nulla.

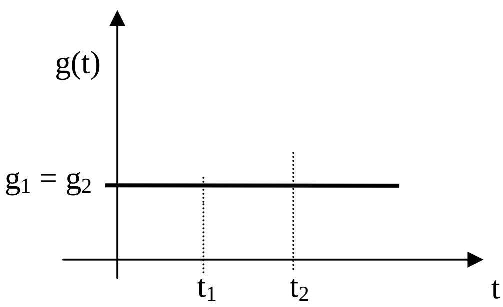


Fig. 1.6

In generale, possiamo avere per una qualsiasi grandezza fisica (temperatura, velocità, livello, ecc.) un andamento generico nel tempo, più o meno articolato, che spesso viene denominato ***"profilo"*** (di temperatura, di velocità, di livello, ecc.).
Nella Fig. 1.7 viene rappresentato un esempio di profilo di velocità. Si pensi, ad esempio, alla cabina di un ascensore di un grattacielo, che deve viaggiare a velocità elevata per collegare in breve tempo piani molto distanti tra loro, ma che deve partire e fermarsi dolcemente per evitare strappi che creino disagi o danni ai passeggeri.

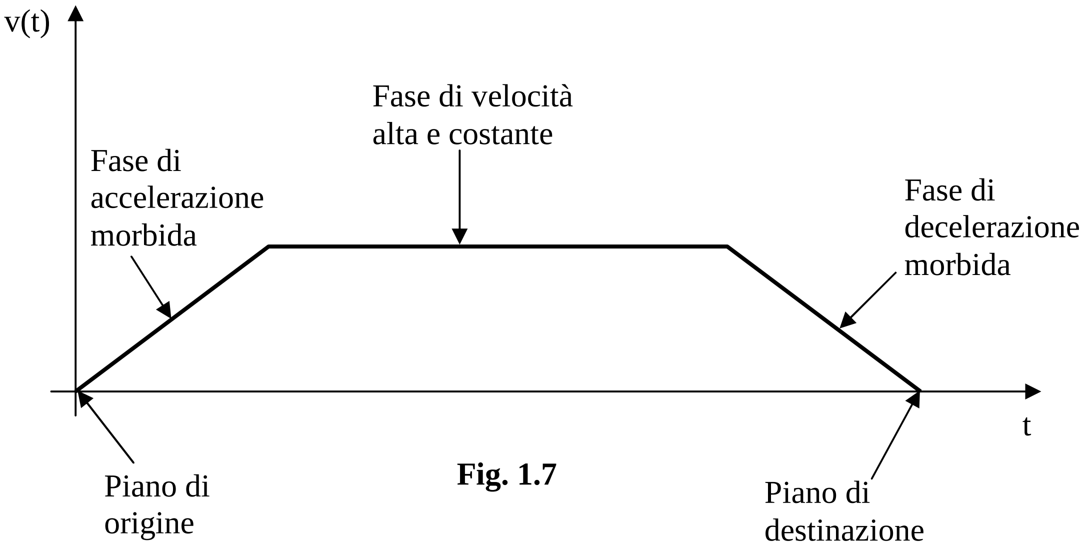


Fig. 1.7

Il profilo di velocità viene appositamente studiato in modo che l'accelerazione in partenza e la decelerazione in arrivo non diano fastidio.

Chiediamoci ora cosa accade se la grandezza *g(t)* non varia linearmente nel tempo; come esempio riferiamoci all'andamento di Fig. 1.8. Scegliamo gli intervalli di tempo $\Delta' t = \Delta'' t$; si nota chiaramente come i corrispondenti valori di Δg sono completamente diversi.
Per $\Delta' t = t_2 - t_1$ *si ha* $\Delta' g = g_2 - g_1$;
per $\Delta'' t = t_3 - t_2$ *si ha* $\Delta'' g = g_3 - g_2$
Essendo *$\Delta' g$ diverso da $\Delta'' g$ e $\Delta' t = \Delta'' t$ ne deriva che **$\Delta' g/\Delta' t$** è diverso da **$\Delta'' g/\Delta'' t$***

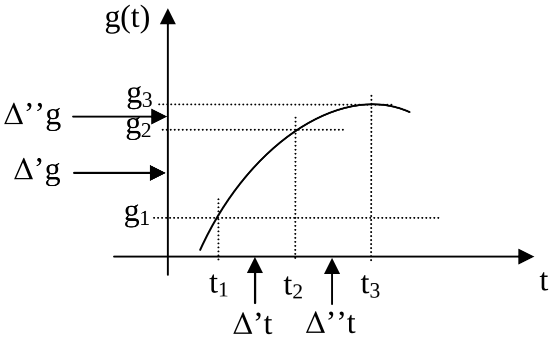


Fig. 1.8

Ciò significa che per un andamento di *g(t)* non lineare, ***la velocità di variazione*** non è costante ma ***varia istante per istante***. Per ogni istante dovremo quindi ricalcolare la velocità, seguendo il metodo indicato nella Fig. 1.9.
Con riferimento a tale figura, supponiamo di voler calcolare la velocità di variazione nel punto ***P***. Tracciamo allora la tangente alla curva nel punto P considerato.

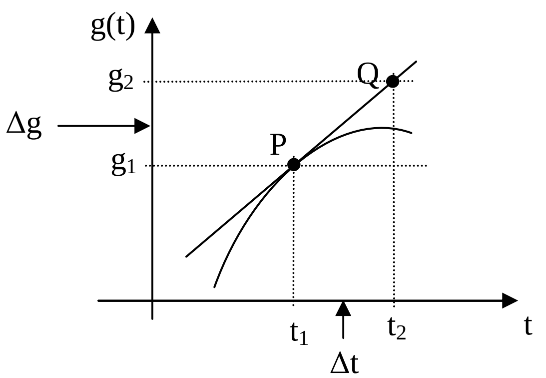


Fig. 1.9

Sulla tangente individuiamo un punto ***Q*** associato all'istante t_2, scelto a piacere. Ebbene, si dimostra che la velocità di variazione della grandezza nel punto P si ottiene dal rapporto ***Δg/Δt*** . Ovviamente, se si vuole calcolare la velocità di variazione in un altro punto, occorre ripetere il procedimento tracciando la tangente alla curva nel nuovo punto considerato.
Esiste anche la possibilità di calcolare la velocità di variazione lavorando direttamente sulla curva (senza cioè considerare alcuna tangente), ma, in questo caso, occorre considerare degli intervalli di tempo estremamente piccoli e valutare in corrispondenza le variazioni di *g* (anch’esse estremamente piccole). In queste condizioni il tratto di curva interessato è talmente piccolo da potersi approssimare con la tangente. Se l’intervallo di tempo *Δt* è estremamente piccolo (che tende a zero), esso verrà indicato con la notazione “***dt***” (si legge "de ti") e rappresenta un intervallo di tempo infinitesimo; in corrispondenza di tale intervallo infinitesimo, la variazione di ***g*** sarà anch’essa infinitesima e verrà indicata con “***dg***” (si legge "de gi"). Per le grandezze fisiche *g(t)* variabili in modo non lineare la notazione ***Δg/Δt*** viene sostituita da ***dg/dt***; il rapporto ***dg/dt*** è una operazione matematica che prende il nome di ***derivata***.

Significato fisico della derivata: ***se un generica grandezza fisica g varia in modo qualsiasi nel tempo, il rapporto dg/dt (la derivata di g rispetto al tempo) rappresenta la velocità (o rapidità) con la quale g varia al variare del tempo.***

E’ fondamentale comprendere che se la generica funzione ***g(t) varia linearmente nel tempo,*** come nelle figure 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6 , la sua velocità di variazione si può calcolare come ***Δg/Δt***. Invece, nel caso più generale di una funzione ***g(t) variabile (in modo continuo) genericamente nel tempo***, come nelle figure 1.8 e 1.9, la sua velocità di variazione deve essere calcolata come ***dg/dt***.

U.D. 2: SEGNALI ELETTRICI

Richiami dal corso di Fisica

- ***Tensione elettrica***

La tensione elettrica (anche detta "***differenza di potenziale***" o "***d.d.p.***") è legata ad un accumulo di cariche elettriche. Più cariche statiche sono presenti in un punto, maggiore è la tensione in quel punto; a cariche positive corrispondono tensioni positive, mentre a cariche negative corrispondono tensioni negative. La tensione elettrica (nel seguito chiamata semplicemente tensione) si misura in volt (*V*).

- ***Intensità di corrente elettrica***

L'intensità di corrente elettrica (nel seguito chiamata semplicemente corrente) è legata al movimento di cariche elettriche attraverso un materiale conduttore. Analizziamo il comportamento di un tratto di materiale conduttore rappresentato in Fig. 1.10, ai capi del quale è applicata una d.d.p. *V* ipotizzata costante nel tempo.

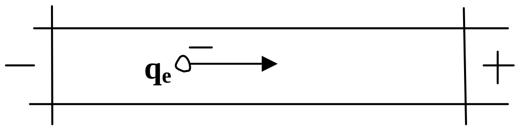


Fig. 1.10

Il generico elettrone libero di carica negativa $\boldsymbol{q_e}$ si muove dal punto a potenziale negativo a quello a potenziale positivo in quanto su di esso, per la legge di Coulomb, agiscono contemporaneamente:

- una forza elettrica di attrazione verso il potenziale positivo
- una forza elettrica di repulsione dal potenziale negativo.

Tale moto interessa tutti gli elettroni liberi presenti nel tratto di conduttore esaminato; se "n" è il numero degli elettroni, la carica elettrica complessiva che si muove, vale:

$$Q_e = n * q_e$$

Se prendiamo in considerazione un intervallo di tempo Δt, in tale intervallo di tempo una generica sezione del conduttore sarà interessata da un passaggio di carica elettrica ΔQ_e . Se la quantità di carica ΔQ_e varia linearmente, possiamo calcolare la velocità di variazione

$$I = \frac{\Delta Q_e}{\Delta t}$$

La velocità di variazione così calcolata rappresenta quella che viene chiamata ***"Intensità di corrente elettrica"***, ovvero la carica elettrica complessiva ΔQ_e che attraversa una generica sezione del conduttore nell'intervallo di tempo Δt.
La corrente si misura in ampere (***A***) e la carica elettrica si misura in coulomb (***C***); per la precedente equazione ***[A] = [C/ s].***
Nel caso più generale di tensione applicata variabile nel tempo, l'intensità di corrente elettrica che circola nel conduttore si definisce come:

$$i(t) = \frac{dQ_e}{dt}$$

- ***Circuito elettrico elementare***

Gli elementi che, collegati tra loro, costituiscono un ***circuito elettrico elementare*** (Fig. 1.11) sono:

- un generatore *G* (di tensione o di corrente)
- un componente elettrico elementare *U* (E' uno dei componenti elettrici Resistore – Condensatore – Induttore) che, collegato ad un generatore, caratterizza il comportamento del circuito).

Le connessioni elettriche tra generatore e componente sono affidate a fili conduttori (ipotizzati di resistenza nulla).

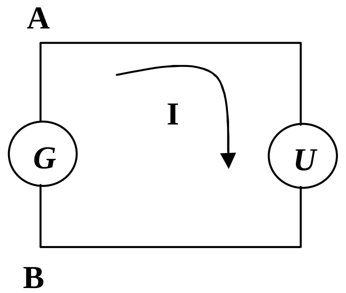


Fig. 1.11

Generatore di tensione

E' un dispositivo elettronico che, nel tempo, rende disponibile tra i suoi due terminali una differenza di potenziale ΔV. Ai fini del nostro studio supporremo tale d.d.p. di valore indipendente dal carico (generatore ideale di tensione)

In relazione al generatore di Fig. 1.11, indicati con A e B i suoi terminali, risulta $\Delta V = V_A - V_B$.
Nello studio dei circuiti elettronici è molto utile collegare uno dei due terminali a massa (***GND***), scegliendolo come punto di riferimento. Se il punto B viene collegato a massa, il suo potenziale viene considerato nullo, cioè $V_B = 0$ per cui la d.d.p. del generatore coincide con il potenziale del punto non connesso a massa, ovvero $\Delta V = V_A = V$

La Fig. 1.12 mostra quanto detto.

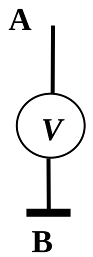


Fig. 1.12

Generatore di corrente

E' un dispositivo elettronico che, nel tempo, rende disponibile all'uscita di uno dei suoi terminali una corrente elettrica ***I***. Ai fini del nostro studio supporremo tale corrente di valore indipendente dal carico (generatore ideale di corrente)

Con riferimento al generatore di Fig. 1.13, indicati con A e B i suoi terminali, un generatore di corrente eroga attraverso uno dei suoi terminali (ad esempio A) una corrente costante di valore ***I***.

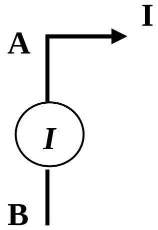


Fig. 1.13

Segnali canonici

Nello studio dei Sistemi Elettronici ci interesseremo prevalentemente di ***grandezze fisiche di tipo elettrico***: una grandezza elettrica variabile nel tempo viene chiamata ***segnale***. Precisiamo che, affinché una grandezza variabile sia definita segnale, deve accadere che le sue variazioni non siano casuali ma rispondano a determinate esigenze. In questo caso si dice che la grandezza ha un contenuto informativo. Giusto per intenderci, la tensione che alimenta una stufa non è un segnale, perché fornisce solo energia e nessuna informazione; la tensione che viene generata da un microfono è un segnale, perché varia in modo da riprodurre fedelmente le variazioni di pressione generate dal suono.
In relazione alle grandezze elettriche che i generatori rendono disponibili ai propri terminali, abbiamo già fatto la classificazione in:

- generatori di tensione
- generatori di corrente

e con riferimento a detta classificazione, parleremo nel seguito di ***segnali in tensione*** o ***segnali in corrente***.
Ci sono certi segnali che interessano in modo particolare il nostro studio, perché vengono utilizzati per compiere indagini sul comportamento di un determinato sistema; tali segnali vengono chiamati ***segnali canonici*** e le funzioni che li rappresentano vengono dette ***funzioni canoniche***.

In relazione alla forma d'onda dei segnali elettrici, si può fare la seguente classificazione:

a) segnale costante
b) segnale a gradino
c) segnale impulsivo
d) impulso di Dirac
e) onda quadra
f) onda triangolare
g) segnale a rampa lineare
h) segnale a rampa parabolica
i) segnale sinusoidale

Nel seguito indicheremo con lettere minuscole le grandezze variabili nel tempo, mentre con lettere maiuscole indicheremo grandezze e parametri costanti nel tempo.

a) Segnale costante

Un segnale costante, è un segnale del tipo $v(t) = E$ ovvero $i(t) = I$ con E ed I valori costanti di tensione in Volt, o di corrente in Ampere.

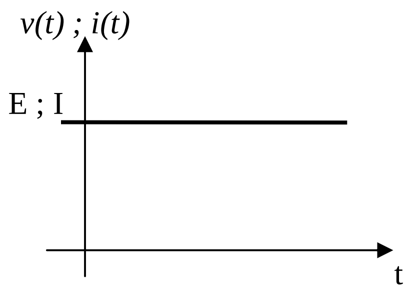


Fig. 1.14

b) Segnale a gradino

Analizziamo ora il generatore di Fig. 1.15, identico a quello di Fig. 1.12 o 1.13, salvo prevedere la presenza di un interruttore **T** in grado di collegare e scollegare il generatore dal circuito.
In linea di principio un generatore di questo tipo fornisce al circuito al quale è collegato un segnale a gradino, in tensione di ampiezza E o in corrente di ampiezza I.

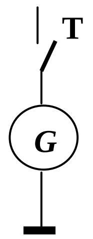


Fig. 1.15

Rappresentiamo graficamente *v(t)* o *i(t)*; nell'ipotesi di interruttore inizialmente aperto, indicando con t_c l'istante in cui l'interruttore si chiude, l'andamento nel tempo dei segnali in tensione o in corrente è quello di Fig. 1.16.

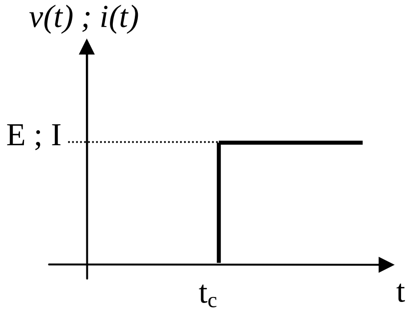


Fig. 1.16

Un segnale il cui andamento sia come quello di Fig. 1.16 prende il nome di ***segnale a gradino di ampiezza E*** o di ampiezza ***I***
Nel caso particolare in cui risulti ***E = 1*** o ***I = 1***, si parla di ***gradino unitario***.

c) **Segnale impulsivo**

Analizziamo il generatore di Fig. 1.17, identico a quelli di Fig. 1.12 o 1.13, salvo prevedere la presenza di un pulsante **P** in grado di collegare e scollegare il generatore dal circuito.
In linea di principio un generatore di questo tipo fornisce al circuito al quale è collegato un segnale in tensione o in corrente, di tipo impulsivo, di ampiezza *E* od *I* e di durata Δt.
Il prodotto $E * \Delta t$ prende il nome di impulso di tensione (V*s); il prodotto $I * \Delta t$ prende il nome di impulso di corrente (A*s)

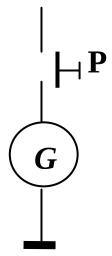


Fig. 1.17

Rappresentiamo graficamente *v(t) ed i(t)*; nell'ipotesi di pulsante normalmente aperto, indicando con Δt l'intervallo di tempo durante il quale il pulsante viene premuto e quindi tenuto chiuso, l'andamento nel tempo dell'impulso di tensione o dell'impulso di corrente è quello di Fig. 1.18.

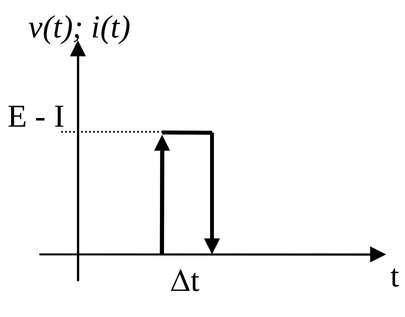


Fig. 1.18

Un segnale il cui andamento sia come quello di Fig. 1.18 prende il nome di ***impulso rettangolare***.
L'impulso rettangolare è un segnale del tipo ovunque nullo tranne che nell'intervallo di tempo Δt considerato.
L'impulso di Fig. 1.18 è un ***impulso ideale*** in quanto si è ipotizzato che il ***fronte di salita*** (transizione basso – alto, rappresentata con ↑) ed il ***fronte di discesa*** (transizione alto – basso rappresentata con ↓) si verificano in un intervallo di tempo nullo. In realtà tali commutazioni non sono mai istantanee.

d) Impulso di Dirac

Un impulso di Dirac **δ(t)** è una ***astrazione teorica***, perché rappresenta un impulso di durata infinitesima ma di ampiezza infinita e tale che l'area da esso sottesa (ampiezza*durata) è uguale a 1.
Nella Fig. 1.19 è rappresentato un impulso rettangolare come quello esaminato al precedente punto c), di base h ed altezza $1/h$, la cui area vale: $A = h * 1/h = 1$.

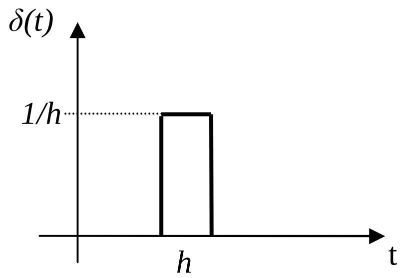


Fig. 1.19

Se, partendo dall'impulso di Fig. 1.19 si fa tendere h a zero, l'ampiezza $1/h$ tende ad un valore infinito ma il valore dell'area resta sempre unitario: si ottiene in tal modo la rappresentazione dell'impulso di Dirac come mostrato in Fig. 1.20.

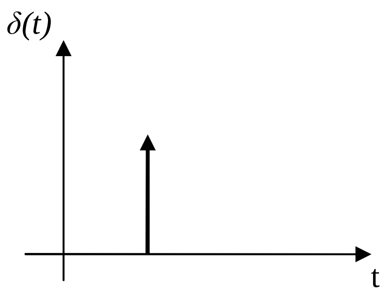


Fig. 1.20

e) Segnale ad onda quadra

Un segnale ad onda quadra è una successione periodica di livelli alti e bassi che si alternano in modo simmetrico.
Dall'andamento di Fig. 1.21 a) si possono trarre le seguenti proprietà:

- il segnale ad onda quadra è un ***segnale periodico***: ciò significa che dopo un intervallo di tempo pari a ***T***, chiamato ***periodo***, il suo andamento si ripete identicamente nel tempo. Il periodo T si misura in secondi (*s*). Il periodo può essere misurato tra due successivi fronti di salita o di discesa.
- L'inverso del periodo *T* è chiamato ***frequenza del segnale***: $f = 1/T$; la frequenza si misura in Hertz (*Hz*). Essa coincide con il numero di periodi che si ripetono in un secondo.

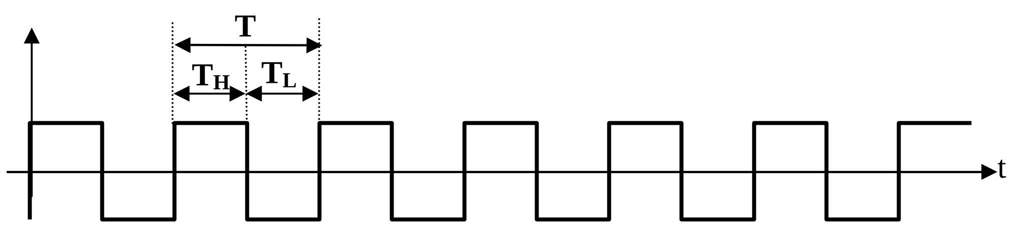


Fig. 1.21 a)

Il segnale di Fig. 1.21 a) **è di tipo bipolare**, ovvero assume, nel periodo T, valori positivi (durante T_H) e negativi (durante T_L).
Un segnale ad onda quadra può anche essere **di tipo unipolare**, ovvero può assumere, nel periodo T, solo valori positivi o solo valori negativi; il segnale di Fig. 1.21 b) è di tipo unipolare positivo.

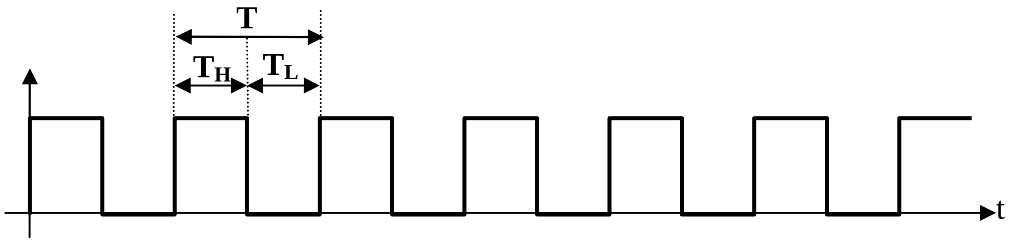


Fig. 1.21 b)

Il periodo T può essere diviso in due parti: T_H, in cui il segnale è a livello alto, e T_L, in cui il segnale è a livello basso; ovviamente $T = T_H + T_L$.
Il rapporto

$$\boldsymbol{\delta = \frac{T_H}{T_H + T_L} = \frac{T_H}{T}}$$

prende il nome di "***duty cicle***".

Nell'onda quadra (Fig. 1.21 a) $T_H = T_L = 1/2\ T \Rightarrow \delta = 0{,}5$

- Se $\delta \neq 0{,}5 \Rightarrow T_H \neq T_L \Rightarrow$ La forma d'onda viene definita "***rettangolare***".

- Se $\delta << 0{,}5 \Rightarrow T_H << T_L \Rightarrow$ La forma d'onda è costituita da una successione di "***impulsi positivi***" (Fig. 1.21 c).

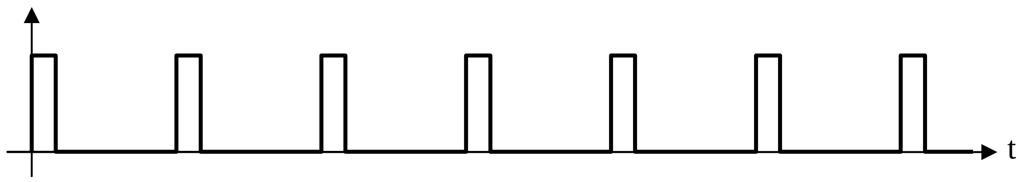


Fig. 1.21 c)

- Se $\delta >> 0{,}5 \Rightarrow T_H >> T_L \Rightarrow$ La forma d'onda è costituita da una successione di "***impulsi negativi***" (Fig. 1.21 d).

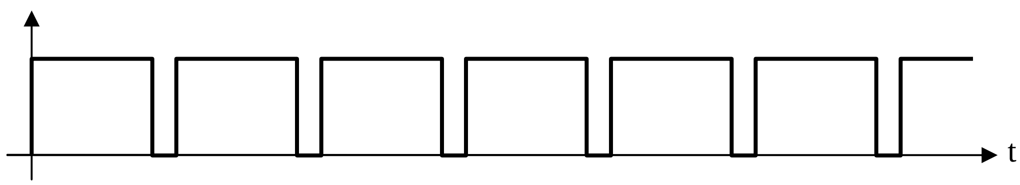


Fig. 1.21 d)

f) Onda triangolare

Un'onda triangolare è una successione periodica di rampe lineari crescenti e decrescenti che si alternano in modo simmetrico (vedi Fig. 1.22 a).
Nella Fig. 1.22 b), invece, è rappresentata una particolare onda triangolare, non più simmetrica, che viene detta, per la sua forma, ***"a dente di sega"***.
Per entrambe le forme d'onda si definiscono un periodo ed una frequenza come per l'onda quadra.

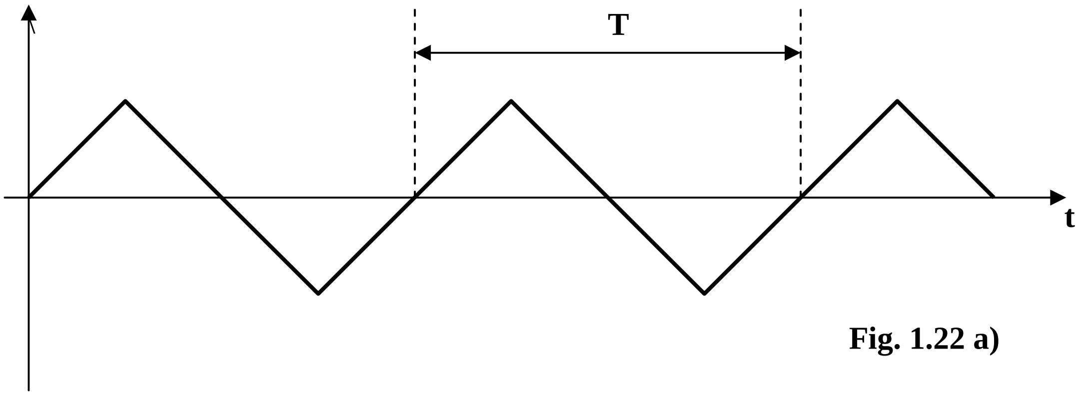


Fig. 1.22 a)

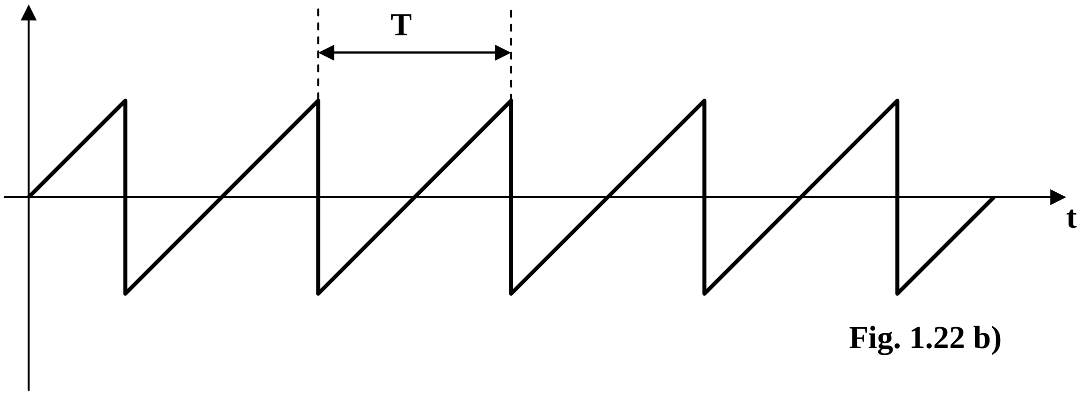


Fig. 1.22 b)

g) segnale a rampa lineare

Un segnale a rampa lineare è un segnale che ***cresce linearmente con il tempo***; nella Fig. 1.23 sono rappresentati due tipi di rampa.
- La rampa che per $t = 0$ assume valore 0 (rampa che passa per l'origine), è un segnale di equazione $\boldsymbol{g(t) = K * t}$. Essendo K il coefficiente angolare della retta che rappresenta il segnale, si comprende come, al variare del suo valore, vari al pendenza della retta. Per $\boldsymbol{K = 1 \rightarrow g(t) = t}$.
- La rampa che per $t = 0$ assume valore diverso da 0 (rampa che non passa per l'origine), è un segnale di equazione $\boldsymbol{g(t) = K * t + k_0}$ dove $\boldsymbol{k_0}$ è il valore che assume la rampa in corrispondenza dell'istante di tempo $t = 0$.

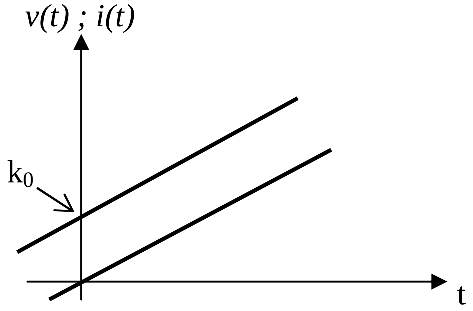


Fig. 1.23

h) segnale a rampa parabolica

Un segnale a rampa parabolica è un segnale che cresce nel tempo secondo la Fig. 1.24. Tale segnale ha una equazione del tipo $\boldsymbol{g(t) = K * t^2}$ che è l'equazione di una parabola.

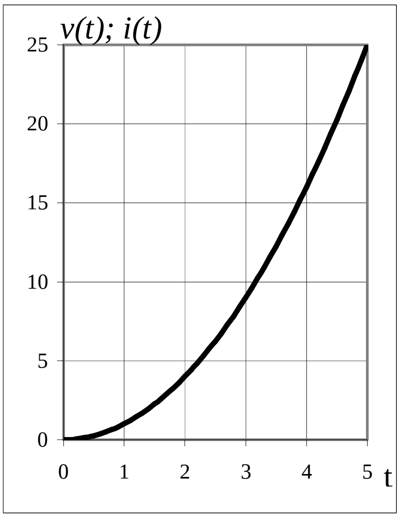


Fig. 1.24

i) segnale sinusoidale

Un segnale sinusoidale è un segnale che varia nel tempo secondo *la funzione trigonometrica seno*: ha una equazione del tipo $\boldsymbol{g(t) = sen\ \varphi}$ ed il suo andamento nel tempo è mostrato in Fig. 1.25. L'angolo φ può essere considerato come l'angolo percorso da un ***segmento unitario*** ruotante con velocità angolare $\boldsymbol{\omega = \varphi/t}$ (la velocità angolare è un rapporto tra angolo e tempo), per cui lo si può esprimere come: $\boldsymbol{\varphi = \omega * t}$. L'equazione $\boldsymbol{g(t) = sen\ \varphi}$ diventa allora: $\boldsymbol{g(t) = sen\ \omega t}$ in cui viene evidenziata la dipendenza dal tempo *t*.
Se al segmento unitario si sostituisce un segmento avente ampiezza pari al valore massimo del segnale, indicato con V_M tale valore, un segnale sinusoidale può essere descritto da una equazione del tipo: $\boldsymbol{v(t) = V_M\ sen\ \omega t}$.

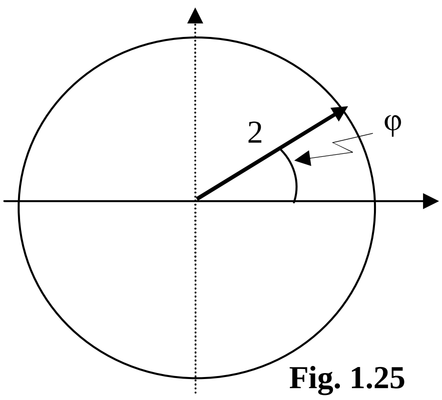
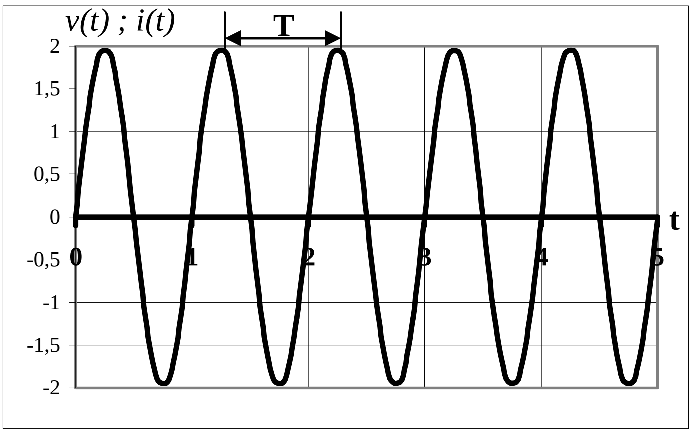


Fig. 1.25



Dall'andamento di Fig. 1.25 si possono trarre le seguenti proprietà:

- il segnale sinusoidale è un ***segnale periodico***: ciò significa che dopo un intervallo di tempo pari a ***T***, chiamato ***periodo***, il suo andamento si ripete identicamente nel tempo. Il periodo T si misura in secondi (*s*).
- L'inverso del periodo *T* è chiamato ***frequenza del segnale***: $\boldsymbol{f = 1/T}$;la frequenza si misura in Hertz (*Hz*). Essa coincide con il numero di periodi che si ripetono in un secondo.

- Si dimostra che $\boldsymbol{\omega = 2\pi/T = 2\pi * f}$. Il termine $\omega = 2\pi f$ prende il nome di ***pulsazione***; la pulsazione si misura in radianti/secondo (rad/s, come una velocità angolare)

j) Segnale esponenziale

In relazione ai segnali che possono interessare un sistema, è tipica quello esponenziale; pertanto si ritiene utile richiamare le principali caratteristiche di due particolari funzioni esponenziali.

- La prima è del tipo $g(t) = k * e^{at}$ dove k ed a sono costanti.

Il suo andamento nel tempo è mostrato in Fig. 1.26.
Ricordiamo che $e^0 = 1$ per cui la risposta del tipo $g(t) = k * e^{at}$ nell'istante iniziale $t = 0$, parte dal valore iniziale k.

Si tenga presente che all'aumentare di t il termine e^{at} tende a:

a) **0,** se $a < 0$
b) **1,** se $a = 0$
c) $+\infty$, se $a > 0$

La rapidità con cui la risposta varia dipende dal valore di a: maggiore è il valore assoluto della costante a, più rapidamente la risposta varia nel tempo.

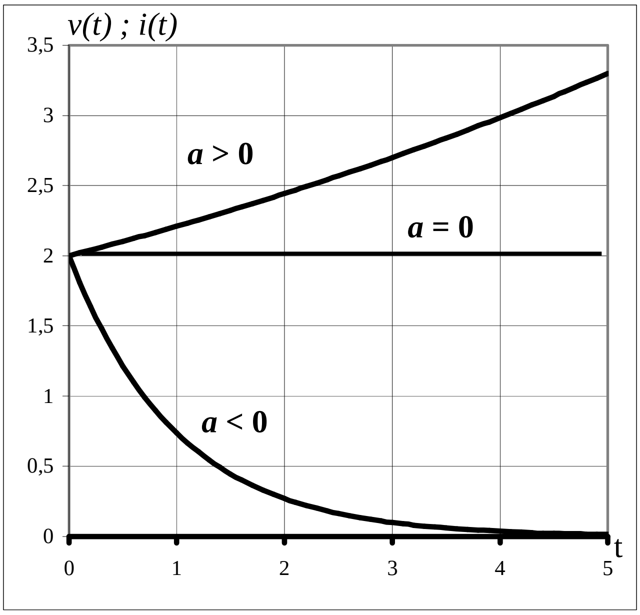


Fig. 1.26

- La seconda è del tipo $\boldsymbol{g(t) = k\,(1 - e^{-at})}$ dove k ed a sono costanti positive.

Il suo andamento nel tempo è mostrato in Fig. 1.27

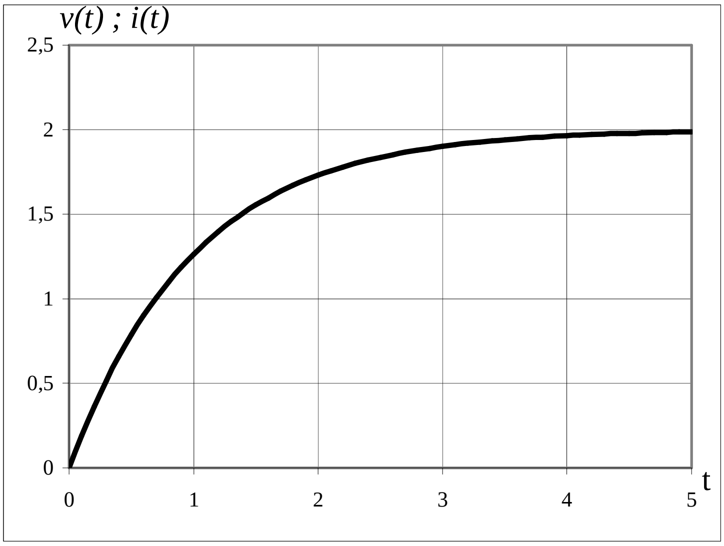


Fig. 1.27

In questo secondo caso la risposta è del tipo $\boldsymbol{g(t) = k\,(1 - e^{-at}) = k - k * e^{-at}}$; nell'istante iniziale $t = 0$ parte dal valore 0 ($k - k * 1 = 0$).
Considerando poi che all'aumentare di t il termine $\boldsymbol{k * e^{-at}}$ tende a zero, la risposta $g(t)$ tende al valore finale k.

U.D. 3: COMPONENTI ELETTRICI ELEMENTARI

I componenti elettrici elementari sono tre: il resistore, il condensatore e l'induttore. Tali componenti sono a due terminali e tra essi è presente la corrispondente grandezza elettrica caratteristica.
Nel seguito si ricaveranno i modelli matematici dei componenti elettrici elementari.

Resistore

Il resistore è un componente realizzato con opportuni materiali resistivi che consentono di ottenere un prefissato valore della sua grandezza elettrica caratteristica: la ***resistenza elettrica R***. Tale grandezza è chiamata in questo modo perché esprime, in una misura diversa a seconda dei casi, la sua capacità di opporsi al passaggio della corrente.
Il simbolo circuitale è quello di figura.

R = Resistenza elettrica

Analizziamo il comportamento di un resistore inserito nel circuito di Fig. 1.28.

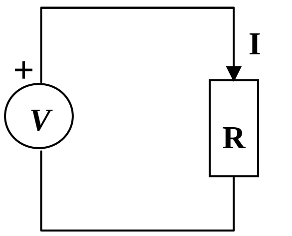


Fig. 1.28

Dalla legge di Ohm si ricava:

$$\boxed{V = R * I \qquad (1.1)}$$

L'equazione 1.1 rappresenta il ***"modello matematico del resistore".***

Il valore di resistenza R rappresenta la costante di proporzionalità tra tensione elettrica applicata ad un materiale e la corrispondente corrente che circola in esso.
L'analisi della 1.1 ci consente di fare le seguenti considerazioni:

- se la corrente in un resistore è nulla, ai suoi capi non si genera alcuna tensione.
- se, viceversa, in un resistore la corrente è diversa da zero, ai suoi capi si genera una tensione il cui valore è imposto dalla 1.1 e quindi dipendente dall'entità della resistenza elettrica.

Esempio 1.3
Calcolare la corrente che circola in un resistore di 2Ω quando ad esso è applicata una tensione di 6V.

$$I = V/R = 6/2 = 3\ A$$

La relazione:

$$R = V / I \qquad (1.2)$$

rapporto tra la tensione presente ai capi di un resistore ed il corrispondente valore di corrente che in esso circola, ci fornisce la ***definizione di resistenza elettrica come la tensione che si genera tra due punti di un materiale quando tra quei due punti circola una corrente di 1 Ampere.***
L'unità di misura è l'***Ohm (Ω)***: [Ω] = [V/A].

Esempio 1.4
Calcolare la tensione che si genera ai capi di un resistore di 5Ω quando è attraversato da una corrente di 1,5 A.

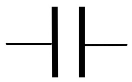
$$V = R*I = 5*1{,}5 = 7{,}5\ V$$

Un resistore percorso da corrente si riscalda, trasformando una potenza elettrica in calore (effetto Joule); essa vale: $Pj = V_R * I = R * I * I = R * I^2$. La potenza elettrica si misura in ***watt (W)***
L'energia elettrica dissipata si misura in ***Joule*** e vale:

$$E_R = Pj * t = R * I^2 * t$$

Condensatore

Il condensatore è un componente costituito da due lamine metalliche (armature) tra le quali viene interposta una sostanza isolante (dielettrico). La tipologia di materiale metallico impiegato per le armature non ha nessuna importanza, mentre quella del materiale dielettrico è determinante per caratterizzare la sua ***grandezza elettrica caratteristica: la capacità elettrica***.
Il simbolo circuitale è quello di figura.



C = Capacità elettrica

Analizziamo il comportamento di un condensatore inserito nel circuito di Fig. 1.29.

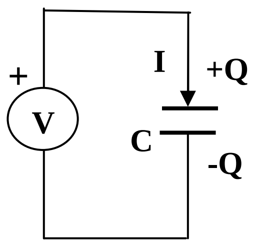


Fig. 1.29

Il legame tra le grandezze in gioco è:

$$Q = C * V \qquad (1.3)$$

Il valore di capacità *C* rappresenta la costante di proporzionalità tra carica elettrica accumulata sulle armature e la corrispondente tensione che tra esse si genera.
La relazione:

$$C = Q / V$$

rapporto tra la carica elettrica presente sulle armature del condensatore ed il corrispondente valore di tensione presente ai suoi capi, ci fornisce la ***definizione di capacità di un condensatore come la quantità di elettricità che esso può immagazzinare quando tra le sue armature la d.d.p. è di 1 Volt.***
L'unità di misura della capacità è il ***Farad (F)***: [F] = [C/V].
Tale unità è molto grande per cui nella pratica le capacità dei condensatori si misurano utilizzando i sottomultipli:
µF (micro Farad = 10^{-6} F);
nF (nano Farad =10^{-9} F);
pF (pico Farad =10^{-12} F).

Per una variazione di tensione ΔV la (1.3) diventa:

$$\Delta Q = C * \Delta V \qquad (1.4)$$

Dividendo ambo i membri della (1.4) per Δt, avendo indicato con Δt l'intervallo di tempo durante il quale avvengono le variazioni di tensione e di carica, si ottiene:

$$\Delta Q/\Delta t = C * \Delta V / \Delta t \qquad (1.5)$$

Essendo, per definizione, $\Delta Q/\Delta t = I$ (corrente che provvede a portare cariche sul condensatore), in definitiva si ottiene

$$\boxed{I = C * \frac{\Delta V}{\Delta t} \qquad (1.6)}$$

Per intervalli di tempo Δt molto piccoli la (1.6) si trasforma nella (1.7)

$$\boxed{I = C * \frac{dV}{dt} \qquad (1.7)}$$

in cui è stata introdotta la derivata della tensione.

L'equazione 1.7 rappresenta il ***"modello matematico del condensatore"***.

Si può notare quanto segue:

- in corrispondenza di intervalli di tempo durante i quali la tensione si mantiene costante (anche ad un valore diverso da 0), la corrente che "circola" nel condensatore è nulla;
- in corrispondenza dell'intervallo di tempo durante il quale la tensione varia, il condensatore è interessato da una corrente di valore diverso da zero.

In altre parole la legge (1.7) ci rivela che un condensatore è interessato da un passaggio di corrente ***solo in presenza di tensioni variabili***. Se la tensione viene mantenuta costante, la corrente è nulla. Inoltre, la corrente è proporzionale, attraverso C, non alla tensione ma alla velocità con cui la tensione varia. Questo significa che, in presenza di tensioni anche elevate ma costanti la corrente è nulla, mentre in presenza di tensioni anche di piccolo valore ma variabili con grande velocità la corrente può essere molto elevata. Ovviamente, ***in corrente continua***, dove tutto è costante, ***il condensatore si comporta come un circuito aperto*** perché non è interessato da alcun passaggio di corrente.

Esempio 1.5

Calcolare la corrente che circola in un circuito con capacità $C = 4\ \mu F$ sollecitato da una variazione lineare di tensione $\Delta V = 6V$ applicata per un intervallo di tempo $\Delta t = 2$ ms.

La velocità di variazione della tensione applicata vale: $\Delta V/\Delta t = 6/2*10^{-3} = 3$ V/ms $= 3*10^3$ V/s

$$I = C * \Delta V/\Delta t = 4*10^{-6} * 3*10^3 = 12\ mA$$

Se la velocità di variazione $\Delta V/\Delta t$ raddoppia, riducendo ad esempio $\Delta t = 1$ ms e mantenendo la stessa $\Delta V = 6V$, la velocità di variazione raddoppia diventando:

$\Delta V/\Delta t = 6/1*10^{-3} = 6$ V/ms $= 6*10^3$ V/s; in questo caso si ottiene una $I = 24$ mA.

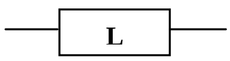
Quando tra le armature del condensatore non è presente alcuna carica elettrica, la d.d.p. tra i suoi terminali è nulla ed il condensatore si dice ***scarico***. Quando, a causa dell'accumulo di cariche elettriche sulle armature, la tensione ai capi del condensatore cresce, si parla di "***carica del condensatore***". Al termine della fase di carica, il campo elettrico che si genera tra le armature immagazzina una energia che è espressa da:

$$Ec = ½\, C * V^2$$

Questa energia dipende dal valore della capacità e dal valore finale raggiunto da *V*. Tale energia viene restituita all'atto della ***scarica*** del condensatore, ovvero quando la tensione ai suoi capi, inizialmente diversa da zero, ritorna al valore *V = 0*.

Induttore

L'induttore è un componente costituito da un filo conduttore che, piegato ad elica cilindrica, forma un avvolgimento avente un certo numero di spire ravvicinate; tale struttura prende anche il nome di bobina. Il materiale che eventualmente funge da supporto a tale avvolgimento acquista proprietà magnetiche nel momento in cui l'avvolgimento è percorso da corrente. Le proprietà magnetiche sono notevolmente diverse a seconda della tipologia di materiale e ciò è determinante per caratterizzare la sua ***grandezza elettrica caratteristica: l'induttanza***.
Il simbolo circuitale è quello di figura.



L = Induttanza

Un induttore è per sua natura ***un componente che presenta una resistenza elettrica praticamente nulla*** (*si dice che è un corto circuito per le correnti costanti*); in regime statico, quindi, la circolazione di corrente deve necessariamente essere limitata da un resistore posto in serie.
Analizziamo il comportamento di un induttore inserito nel circuito di Fig. 1.30.

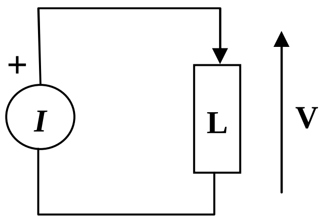


Fig. 1.30

Il legame tra le grandezze in gioco è:

$$\Phi_C = L*I \qquad (1.8)$$

dove Φ_C è il flusso magnetico concatenato con l'induttore.
Il valore di induttanza *L* rappresenta la costante di proporzionalità tra la corrente che circola nell'induttore ed il corrispondente flusso magnetico che in esso si genera.
La relazione:

$$L = \Phi_C / I$$

rapporto tra il flusso magnetico concatenato con l'induttore ed il corrispondente valore di corrente che l'ha generato, ci fornisce la ***definizione di induttanza come la quantità di flusso magnetico concatenato prodotto da una corrente di 1 Ampere.***
L'unità di misura dell'induttanza è l' ***Henry (H)***:
[H] = [Weber/Ampere] = [Volt*Secondo/Ampere] = [Ohm*secondo].
Oltre all'unità principale, vengono anche utilizzati i sottomultipli:

mH (milli Henry = 10^{-3} H);
μH (micro Henry = 10^{-6} H).

Per una variazione di corrente ΔI la (1.8) diventa:

$$\Delta\Phi_C = L^* \Delta I \qquad (1.9)$$

Dividendo ambo i membri della (1.9) per Δt, avendo indicato con Δt l'intervallo di tempo durante il quale avvengono le variazioni di corrente e flusso concatenato, si ottiene:

$$\Delta\Phi_C / \Delta t = L^* \Delta I / \Delta t$$

Essendo, per definizione, $\Delta\Phi_C / \Delta t = V$ (tensione ai capi dell'induttore) **,** in definitiva si ottiene

$$\boxed{V = L^* \frac{\Delta I}{\Delta t} \qquad (1.10)}$$

Per intervalli di tempo Δt molto piccoli la (1.10) si trasforma nella (1.11)

$$\boxed{V = L^* \frac{dI}{dt} \qquad (1.11)}$$

in cui è stata introdotta la derivata della tensione.

L'equazione 1.11 rappresenta il ***"modello matematico dell'induttore"***.

Si può notare quanto segue:

- in corrispondenza di intervalli di tempo durante i quali la corrente si mantiene costante (anche ad un valore diverso da 0), la tensione ai capi dell'induttore è nulla;
- in corrispondenza dell'intervallo di tempo durante il quale la corrente varia, ai capi dell'induttore si presenta un valore di tensione *V* diverso da zero.

In altre parole la legge 1.11 ci rivela che ai capi di un induttore compare una tensione solo quando la corrente che lo attraversa varia nel tempo. La situazione opposta a quella vista per il condensatore; in questo caso è la tensione ad essere proporzionale, attraverso *L*, non alla corrente ma alla velocità con cui la corrente varia. Quindi la tensione indotta è piccola quando la corrente varia lentamente (è nulla per correnti costanti) mentre diventa anche molto grande quando la corrente varia velocemente. ***In corrente continua***, dove tutto è costante, ***l'induttore si comporta come un cortocircuito*** perché la corrente che lo attraversa genera una tensione indotta nulla. Infine, sottolineiamo che, come il condensatore tende a mantenere costante la tensione ai suoi capi, così l'induttore tende a mantenere costante la corrente che lo attraversa.

Esempio 1.6
Calcolare la tensione ai capi di un induttore di induttanza L = 4 mH quando, in corrispondenza di un intervallo di tempo Δt = 2 ms ci sia una variazione lineare di corrente ΔI =6mA
La velocità di variazione della corrente inviata vale: $\Delta I/\Delta t = 6*10^{-3} / 2*10^{-3} = 3$ ***A/s***

$$V = L * \Delta I / \Delta t = 4 * 10^{-3} * 3 = 12mV$$

Se la velocità di variazione $\Delta I/\Delta t$ raddoppia, riducendo ad esempio $\Delta t = 1$ ms e mantenendo la stessa $\Delta I = 6mA$, la velocità di variazione raddoppia diventando: $\Delta I/\Delta t = 6*10^{-3}/1*10^{-3} = 6$ A/s ; in questo caso si ottiene una $V = 24$ mV.

Quando l'induttore non è attraversato da corrente, si dice ***scarico***. Quando, invece, è attraversato da una corrente *I*, costante o variabile, accumula una energia elettromagnetica che vale

$$E_L = ½ L * I^2$$

Questa energia dipende dal valore dell'induttanza e dal valore finale raggiunto da *I*. Tale energia viene restituita all'atto della ***scarica*** dell'induttore, ovvero quando la corrente, inizialmente diversa da zero, ritorna al valore $I = 0$.

Da tutto quanto si è detto fino ad ora, si intuisce che il comportamento dell'induttore è duale rispetto a quello di un condensatore, nel senso che il comportamento della corrente che circola in un induttore è analogo al comportamento della tensione che si manifesta ai capi di un condensatore e, viceversa, il comportamento della tensione che si crea ai capi di un induttore è analogo al comportamento della corrente che interessa un condensatore.

MODULO 2: STUDIO NEL DOMINIO DEL TEMPO

U.D.1: COMPORTAMENTO DEI COMPONENTI ELETTRICI ELEMENTARI

Resistori

Un partitore di tensione resistivo è un semplice circuito con due resistenze in serie (attraversate dalla stessa corrente), che suddivide la tensione totale V in due tensioni, V_1 ai capi di R_1 e V_2 ai capi di R_2 (Fig. 2.1). Le 2.1 e 2.2 rappresentano le relazioni esistenti tra le tensioni parziali V_1 e V_2, da un lato, e la tensione totale V dall'altro.

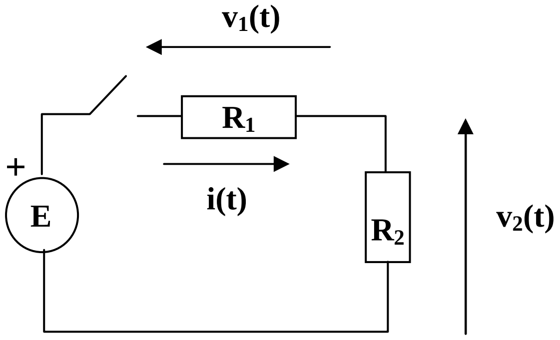


Fig. 2.1

$$v_1(t) = E * \frac{R_1}{R_1 + R_2} \qquad (2.1)$$

$$v_2(t) = E * \frac{R_2}{R_1 + R_2} \qquad (2.2)$$

Analizziamo il comportamento del circuito di Fig. 2.1. Alimentiamo il circuito con ***un segnale a gradino di ampiezza E***, fornito dal generatore di tensione, e cerchiamo di mettere in relazione tra loro la tensione E, la corrente i e la tensione su una delle due resistenze (ad esempio v_2). Se osserviamo la Fig. 2.2, scopriamo che, a parte la diversità dei valori (che dipendono dalle resistenze), le grandezze prese in esame hanno un andamento identico e, soprattutto, sono allineate nel tempo.

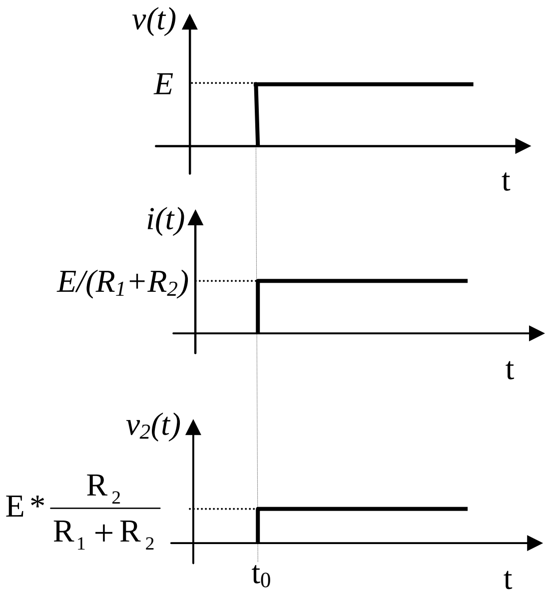


Fig. 2.2

Dalla Fig. 2.2 possiamo allora dedurre quanto segue:

"Se applichiamo una tensione V ad un partitore resistivo, la corrente che circola nel circuito e le tensioni che si formano sulle due resistenze, assumono un valore che dipende dalla legge di Ohm, senza però alcun ritardo. "

Condensatori ed induttori

Vogliamo esaminare, così come abbiamo fatto per il resistore, le risposte che forniscono un condensatore ed un induttore ad una sollecitazione a gradino.
Sappiamo che il condensatore e l'induttore sono componenti in grado di accumulare energia durante la fase di carica per poi restituirla all'atto della scarica. L'accumulo e la restituzione di energia non può avvenire istantaneamente; pertanto, a differenza di un circuito resistivo, ***in un circuito capacitivo o induttivo la risposta ad un gradino di tensione non è immediata ma presenta un certo ritardo.***
Non avendo ancora le conoscenze matematiche necessarie per determinare l'evoluzione nel tempo di questi segnali, procederemo visualizzando i loro andamenti in laboratorio, in modalità reale o simulata mediante appositi programmi software.
Tali andamenti sono stati ricavati considerando la risposta al gradino dei sistemi di tipo RC ed RL: la presenza di un resistore in serie alla capacità ed all'induttanza ha il solo scopo di evitare funzionamenti in corto circuito.

Risposta al gradino di un circuito RC

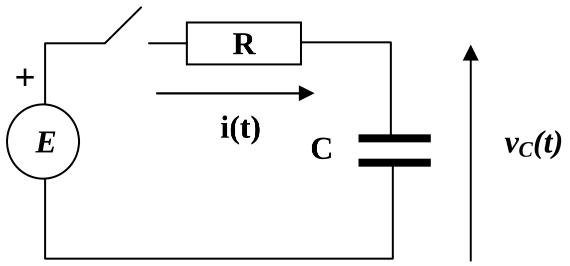


Fig. 2.3

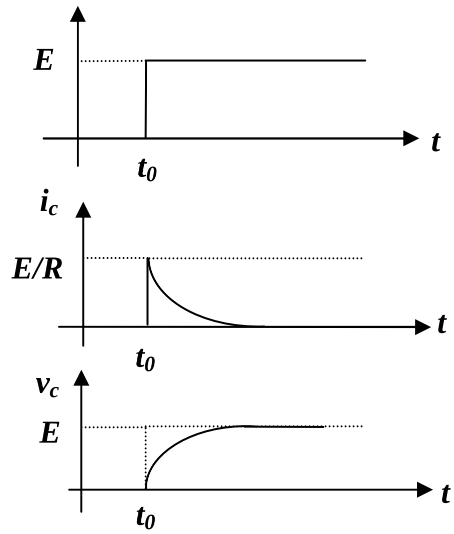


Fig. 2.4

Gli andamenti di $i_c(t)$ e $v_c(t)$ sono riportati in Fig. 2.4. Da tale figura si evince che la corrente $i_c(t)$, dopo un picco iniziale che vale *E/R* (quando il condensatore è completamente scarico), si attenua a mano a mano che le armature del condensatore si caricano, fino ad annullarsi completamente. La tensione ai capi del condensatore $v_c(t)$, partendo da un valore iniziale nullo, assume il suo valore finale $v_c(t) = E$ non istantaneamente ma ***con un certo ritardo*** (inerzia della tensione).
Valutiamo dal punto di vista dimensionale l'unità di misura del prodotto *R * C*:

[R * C] = [V/A] * [C/V] = [C/A] = [C * s / C] = [sec].

*Il prodotto **R*C** prende il nome di **costante di tempo**, si indica con **τ** (si legge tau) e si misura in **secondi.***

Introdotta la costante di tempo, si può ora affermare che il ritardo con il quale il circuito raggiunge i valori finali (regime) è pari a 4 – 5 volte la costante di tempo. In altre parole la durata della fase transitoria dipende dai valori di *C* ed *R*

Esempio 2.1
Un circuito caratterizzato da R = 5KΩ e C = 10μF viene sollecitato da un segnale a gradino in tensione di valore 8V. Calcolare la durata della fase transitoria.
La costante di tempo del circuito vale: $\boldsymbol{\tau = R * C = 5*10^{3} * 10*10^{-6} = 50*10^{-3} = 50\ ms}$
La condizione di regime (Vc = 8V) verrà pertanto raggiunta dopo un tempo t = 5 τ *= 250 ms*

Risposta al gradino di un circuito RL

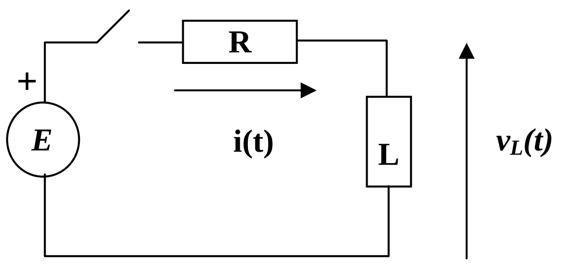


Fig. 2.5

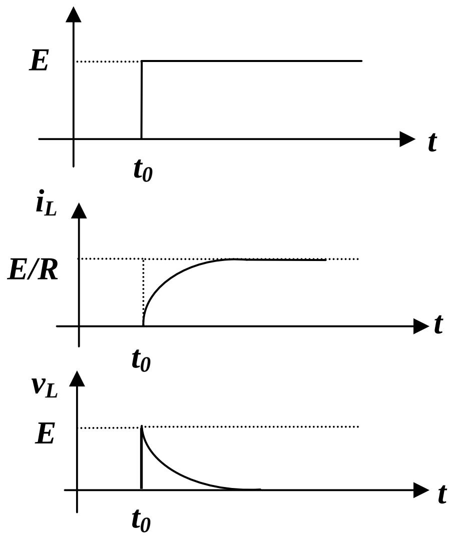


Fig. 2.6

Gli andamenti di $i_L(t)$ e $v_L(t)$ sono riportati in Fig. 2.6.
Da tale figura si evince che la corrente $i_L(t)$, partendo da un valore iniziale nullo, assume il suo valore finale $i_L(t) = E/R$ non istantaneamente ma ***con un certo ritardo*** (inerzia della corrente), mentre la tensione, dopo un picco iniziale che vale *E* (quando l'induttore è completamente scarico), si attenua a mano a mano che l'induttore si carica, fino ad annullarsi completamente.
Valutiamo dal punto di vista dimensionale l’unità di misura del rapporto *L*/*R*:

[L/R] = [H/Ω] = [Ω*s/ Ω] = [sec]. *Il rapporto* ***L/ R*** *prende il nome di* ***costante di tempo, si indica con τ e si misura ancora in secondi***.

Anche per il circuito induttivo si può affermare che il ritardo con il quale il circuito raggiunge i valori finali (regime) è pari a 4 – 5 volte la costante di tempo. In altre parole la durata della fase transitoria dipende dai valori di *L* ed *R*

Esempio 2.2
Un circuito caratterizzato da R = 100 Ω ed L = 1H viene sollecitato da un segnale a gradino in tensione di valore 8V. Calcolare la durata della fase transitoria.
La costante di tempo del circuito vale: $\boldsymbol{\tau = L/R = 1/100 = 0{,}01 = 10ms}$
La condizione di regime verrà pertanto raggiunta dopo un tempo t = 5 τ *= 50 ms.*

U.D. 2: MODELLO MATEMATICO, NEL DOMINIO DEL TEMPO, DI UN SISTEMA ELETTRICO RLC

A questo punto mettiamo insieme i tre tipi di componenti elettrici che abbiamo studiato (resistore, induttore e condensatore) e cerchiamo di determinare il modello matematico del circuito complesso che ne viene fuori. Chiameremo questo circuito "Rete RLC" dalle iniziali dei componenti usati (vedi Fig. 2.7).

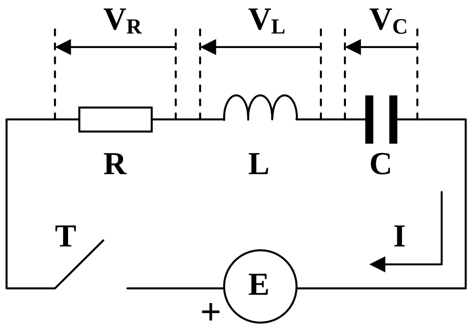


Fig. 2.7

Facciamo notare che l'interruttore T serve a generare un gradino di tensione sul gruppo RLC e che, essendo i tre componenti in serie, la corrente I che li attraversa è unica.
Applicando il II° Principio di Kirchhoff, possiamo scrivere (dopo la chiusura dell'interruttore):

$$\mathbf{E = V_R + V_L + V_C}$$

Ricordando che il legame che si genera tra tensione e corrente per ogni componente elementare è rappresentato dai modelli matematici, rispettivamente, (1.1), (1.11) e (1.7), possiamo scrivere:

$$E = R * I + L * \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} * \sum (I * dt) \quad (2.3)$$

<u>L'equazione 2.3 rappresenta il "**modello matematico del sistema elettrico RLC"**</u>

Spendiamo qualche parola sull'ultimo termine della (2.3).
Dalla (1.7) sappiamo che $I = C * \frac{dV}{dt}$; a noi però interessa ricavare l'espressione della tensione V in funzione della corrente I.
Possiamo scrivere allora $dV = \frac{1}{C} * I * dt$ (formula inversa).
Ma questa è solo una piccola variazione di tensione sul condensatore; per avere tutta la tensione accumulata, occorre sommare tutti i contributi dV che si susseguono nel tempo, per cui abbiamo $V_C = \sum dV = \sum \frac{1}{C} * I * dt$
Essendo 1/C costante, può essere portato fuori dal segno di sommatoria, ottenendosi in questo modo l'ultimo termine della (2.3).
A questo punto si pone il problema di determinare l'espressione della corrente e qui sorgono le difficoltà, perché la (2.3), come si vedrà più avanti negli studi, è una particolare equazione chiamata equazione differenziale, la cui risoluzione è alquanto complessa.
Nello studio dei Sistemi si preferisce seguire un percorso alternativo: quello della "Trasformata di Laplace".

MODULO 3: STUDIO NEL DOMINIO DI LAPLACE

Trasformata di Laplace

Rinunciando per il momento alla definizione rigorosa di operazione di trasformazione secondo Laplace, facciamo solo osservare che con l'impiego della trasformata si passa da funzioni del tipo ***f(t)***, che sono funzioni del tempo, a funzioni del tipo ***F(s)*** che sono funzioni di una nuova variabile, indicata con ***s***.
Tale variabile è definita nel seguente modo: **s = σ + jω** (è un numero complesso), e prende il nome di ***variabile complessa***.

Tutto quanto detto si può rappresentare in modo schematico come segue:

f(t) = FUNZIONE NEL DOMINIO DEL TEMPO → ***trasformata di Laplace*** → ***F(s)*** = FUNZIONE NEL DOMINIO DI "*s*"

Il seguente simbolismo **L[ ]** indica l'operazione di trasformazione sulla funzione f(t):

$$\mathbf{L[\,f(t)] = F(s)}$$

Ciò premesso, riportiamo di seguito tre proprietà della trasformata di Laplace che saranno molto importanti per la ricerca di quel percorso alternativo, di cui si è detto alla fine del Modulo 2, che ci consentirà di risolvere in modo più sbrigativo i problemi legati ai circuiti elettrici.

- Se indichiamo con F(s) la trasformata di f(t), la trasformata dell'operazione k ***** f(t), con k costante, è:

$$\mathbf{L[k * f(t)] = k * L[f(t)] = k * F(s)} \quad (3.1)$$

Questo significa che, quando occorre trasformare una funzione che è moltiplicata per una costante, basta trasformare la sola funzione e moltiplicare il risultato per la costante.

- Se indichiamo con F(s) la trasformata di f(t) e con G(s) la trasformata di g(t), la trasformata dell'operazione f(t) + g(t) (somma delle due funzioni) è:

$$\mathbf{L[f(t) + g(t)] = L[f(t)] + L[g(t)] = F(s) + G(s)} \qquad (3.2)$$

Questo significa che, quando occorre trasformare la somma di due funzioni, basta trasformare separatamente le due funzioni e poi sommare le trasformate così ottenute.

- Se indichiamo ancora con F(s) la trasformata di f(t), la trasformata dell'operazione **df(t)/dt** è:

$$\mathbf{L[df(t)/dt\,] = s * L[f(t)] = s * F(s)} \quad (3.3)$$

Questo significa che, quando occorre trasformare una funzione che è la derivata di un'altra funzione, basta trasformare la seconda funzione e moltiplicare il risultato per s.

Modelli matematici dei componenti elettrici nel dominio di s

Alla luce di quanto detto, ricaviamo i modelli matematici del resistore, del condensatore e dell'induttore nel dominio di ***s***, a partire dai modelli matematici degli stessi rappresentati, nel dominio del tempo, dalle (1.1), (1.11) e (1.7).
Utilizziamo le lettere minuscole per indicare grandezze elettriche variabili nel tempo, tenendo presente che le grandezze elettriche trasformate secondo Laplace non dipendono più dal tempo.

- Resistore
Modello matematico nel dominio del tempo: v(t) = R * i(t).
Indicando con V(s) la trasformata di v(t) e con I(s) la trasformata di i(t), la proprietà (3.1) ci consente di scrivere:

$$V(s) = \mathbf{L}[v(t)] = \mathbf{L}[R * i(t)] = R * \mathbf{L}[i(t)] = R * I(s)$$

quindi $V(s) = R * I(s)$, da cui si ricava il

Modello matematico nel dominio di s:

$$\boxed{V(s) = R * I(s) \quad (3.4)}$$

La (3.4) ci dice che anche nel dominio di *s* vale la legge di Ohm; inoltre la resistenza R è ancora definita come rapporto tra tensione e corrente.

$$\boxed{R = \frac{V(s)}{I(s)} \quad (3.5)}$$

- Condensatore
Modello matematico nel dominio del tempo: i(t) = C * dv / dt.
Indicando con V(s) la trasformata di v(t) e con I(s) la trasformata di i(t), le proprietà (3.1) e (3.3) ci consentono di scrivere:

$$I(s) = \mathbf{L}[i(t)] = \mathbf{L}[C * dv/dt] = C * \mathbf{L}[dv/dt] = C * s * \mathbf{L}[v(t)] = C * s * V(s)$$

quindi $I(s) = C * s * V(s)$, da cui si ricava il

Modello matematico nel dominio di s:

$$\boxed{V(s) = \frac{1}{sC} * I(s) \quad (3.6)}$$

La (3.6) ci dice che nel dominio di *s* anche per un condensatore vale la legge di Ohm, a condizione di definire il rapporto tra tensione e corrente nel seguente modo:

$$\boxed{Z_C(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = \frac{1}{sC} \quad (3.7)}$$

$Z_C(s)$ ha le stesse dimensioni di una resistenza (**[Ω]**) e viene detta ***"Impedenza del condensatore"***.

- Induttore
Modello matematico nel dominio del tempo: $v_L(t) = L * di / dt$.
Indicando con V(s) la trasformata di v(t) e con I(s) la trasformata di i(t), le proprietà (3.1) e (3.3) ci consentono di scrivere:

$V(s) = \mathbf{L}[v(t)] = \mathbf{L}[L * di/dt] = L * \mathbf{L}[di/dt] = L * s * I(s)$

quindi $V(s) = L * s * I(s)$, da cui si ricava il

Modello matematico nel dominio di s:

$$\boxed{V(s) = sL * I(s) \quad (3.8)}$$

La 3.8 ci dice che nel dominio di *s* anche per un induttore vale la legge di Ohm a condizione di definire il rapporto tra tensione e corrente nel seguente nodo:

$$\boxed{Z_L(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = sL \quad (3.9)}$$

$Z_L(s)$ ha le stesse dimensioni di una resistenza (**[Ω]**) e viene detta *"* ***Impedenza dell'induttore****"*.

Ricapitolando, nel dominio di s:

a) *I modelli matematici dei componenti non contengono più la variabile tempo.*
b) *I termini* $Z_C(s)=1/sC$ *e* $Z_L= sL$*, omogenei con* ***R****, vengono chiamati* ***impedenza***
c) *L'introduzione delle impedenze* $Z_C(s)$ *e* $Z_L(s)$ *consente di estendere la legge di Ohm anche ai componenti condensatore ed induttore*
d) *Con le precisazioni di cui sopra, ai sistemi elettrici contenenti induttanze e capacità si possono applicare tutte le leggi valide per i circuiti puramente resistivi.*

Alla luce di quanto detto, riprendiamo in esame il circuito di Fig. 2.7 (Mod.2 – U.D.2) e ricaviamo il modello matematico.
Sostituiamo al condensatore e all'induttore le rispettive impedenze $Z_C(s)$ e $Z_L(s)$, come indicato nella Fig. 3.1.
Semplicemente per non complicare la figura ed i passaggi matematici, eviteremo di usare, accanto alle grandezze elettriche in gioco, l'indicazione (s) che indica la loro dipendenza dalla variabile s; questo però non ci deve far dimenticare che questa dipendenza esiste.

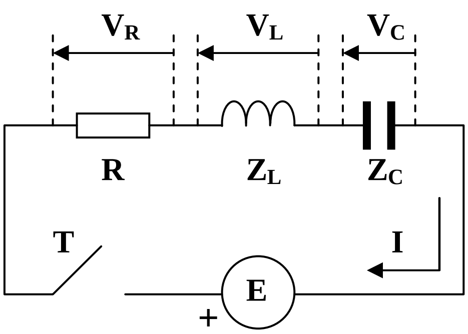


Fig. 3.1

Ricordiamo ancora che l'interruttore T serve a generare un gradino di tensione sul gruppo RLC e che, essendo i tre componenti in serie, la corrente I che li attraversa è unica.
Applicando il II Principio di Kirchhoff, possiamo scrivere (dopo la chiusura dell'interruttore):

$$\mathbf{E = V_R + V_L + V_C}$$

Rappresentando il legame che si genera tra tensione e corrente per ogni componente elementare nella nuova veste descritta con le (3.4), (3.8) e (3.6), possiamo scrivere:

$$\mathbf{E = R * I + Z_L * I + Z_C * I}$$

Mettendo in evidenza la corrente I otteniamo:

$$\mathbf{E = (R + Z_L + Z_C) * I} \qquad (3.10)$$

L'equazione 3.10 rappresenta il "**modello matematico del sistema elettrico RLC"**

Tale equazione è di tipo algebrico e non di tipo differenziale come quella descritta dalla 2.3 ricavata nel Mod.2 – U.D.2. E' evidente che in questo caso si può calcolare immediatamente la corrente I dalla formula inversa della 3.10.
Il termine in parentesi ($R + Z_L + Z_C$) spesso viene detto ***"impedenza equivalente"*** ed indicato con $\boldsymbol{Z_{eq}}$, per cui la 3.10 diventa

$$\mathbf{E = Z_{eq} * I} \qquad (3.11)$$

L'impedenza equivalente Z_{eq} rappresenta una unica quantità che porta in conto gli effetti di tutti i resistori, gli induttori e i condensatori presenti nel circuito.
L'impiego della Trasformata di Laplace ha semplificato il modello matematico del sistema, trasformando una equazione differenziale in una equazione algebrica e consentendo di svolgere sul circuito delle operazioni algebriche che prima non erano consentite..

MODULO 4 : INTRODUZIONE ALLA TEORIA DEI SISTEMI

U.D 1: DEFINIZIONE DI SISTEMA E DI PROCESSO

Sistema

Il concetto di sistema è qualcosa di così generale che non è facile darne una definizione semplice ed esaustiva. Quella che meglio approssima il concetto è la seguente:

"Un sistema è un insieme di parti che interagiscono tra loro per perseguire un obiettivo comune"

Una bicicletta, ad esempio, è costituita da tante parti (pedali, ruote, manubrio, catena, ecc.) che, prese da sole magari non hanno alcun significato, ma che, unite insieme, formano un complesso che consente di far spostare una persona in modo relativamente agevole. Tale insieme può essere considerato un sistema.
Qualunque sia il sistema considerato, esso può essere rappresentato con uno schema a blocchi, come indicato nella Fig. 4.1.

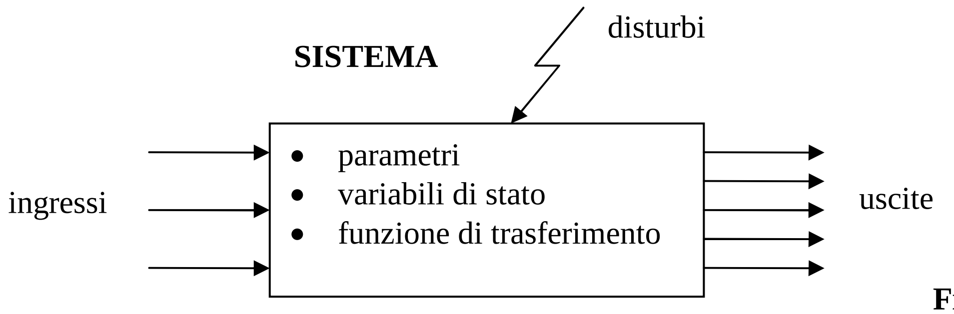


Fig. 4.1

In relazione alle ***variabili esterne*** relative al SISTEMA si hanno:

- Gli ***ingressi***. Sono le ***sollecitazioni*** (o eccitazioni) che dall'esterno vengono applicate al sistema e lo costringono a fare delle cose. Nel caso della bicicletta, possiamo pensare alla forza applicata sui pedali per farla procedere e/o al movimento di rotazione dato al manubrio per farle cambiare direzione.

- I ***disturbi***. Sono sollecitazioni ***anomale ed indesiderate*** che dall'esterno vengono applicate al sistema e che ne condizionano il comportamento in modo più o meno sensibile. Nel caso della bicicletta possiamo immaginare la presenza di irregolarità del piano stradale (che producono sobbalzi nel movimento della bicicletta) e/o ad un piano stradale che presenti salite o discese.

- Le ***uscite***. Sono le ***risposte*** che il sistema dà verso l'esterno per effetto delle sollecitazioni ricevute (ingressi). Nel caso della bicicletta, una uscita è costituita dalla sua velocità, in modulo e direzione.

In relazione alle ***caratteristiche interne*** del sistema si hanno:

- I ***parametri***. Sono i valori che possono assumere certi elementi interni al sistema che ne caratterizzano il funzionamento. Nel caso della bicicletta possiamo pensare alla sua massa espressa in Kg. Risulta evidente che due biciclette aventi masse diverse presenteranno comportamenti diversi a parità di forza sui pedali (due sistemi con parametri diversi rispondono in modo diverso ad una identica sollecitazione).

- Le ***variabili di stato***. Rappresentano grandezze fisiche interne al sistema che possono assumere valori particolari per tener conto dello ***"stato interno"*** (o semplicemente ***"stato"***) del sistema, cioè della condizione in cui si trova quando viene sollecitato. La considerazione di uno "stato" del sistema consente di giustificare il fatto che lo stesso sistema, in tempi diversi, risponde in modo diverso alle sollecitazioni cui viene sottoposto. Nel caso della bicicletta, tutti sono in grado di rendersi conto che lo sforzo che è necessario applicare ai pedali quando ci si mette in moto è molto più consistente di quello necessario per mantenere in moto la bicicletta. Confrontando le due situazioni, possiamo affermare che il sistema bicicletta si trova in due stati diversi: nel primo deve vincere le forze di attrito e, soprattutto, le forze di inerzia dovute alla massa totale (persona + bicicletta); nel secondo caso deve vincere solo le forze di attrito che la bicicletta incontra durante il percorso (a velocità costante le forze di inerzia sono nulle).
- La ***funzione di trasferimento***. In questa fase definiamo funzione di trasferimento il generico legame analitico tra ingresso ed uscita.

Processo

L'insieme delle funzioni che un sistema svolge prende il nome di "***processo***". Si distingue quindi la parte strutturale (sistema) da quella funzionale (processo). Nel caso della bicicletta, il sistema è costituito dalla bicicletta stessa, il processo è rappresentato dall'atto di trasportare una persona; la grandezza fisica che identifica il processo legato alla bicicletta può essere la velocità.
Controllare un processo significa eseguire una serie di operazioni che consentano ad una o più grandezze fisiche che identificano il processo di assumere dei valori desiderati, indipendentemente da eventuali disturbi che dovessero sopraggiungere. Nel caso della bicicletta un controllo di processo potrebbe essere quello di mantenere costante la sua velocità. Se all'ingresso del sistema bicicletta è presente una eccitazione costante (forza applicata sui pedali), in condizione di percorso in piano, la velocità resta costante. Evidentemente le cose cambiano nel caso di un percorso in salita: ad un ingresso costante corrisponde una riduzione di velocità. La salita può essere considerata una sollecitazione indesiderata, esterna al sistema, che ne condiziona il comportamento (definizione data per i disturbi); un percorso in salita può pertanto rappresentare un ulteriore esempio di disturbo che agisce sul sistema. Volendo controllare il processo (mantenere la velocità costante) si deve aumentare la forza applicata sui pedali.
La regolazione della forza applicata sui pedali per mantenere la velocità costante è una operazione che viene denominata ***controllo di processo***.
Quando tale controllo viene eseguito dall'uomo, si parla di ***controllo manuale***; quando è il sistema stesso ad autoregolarsi, senza l'intervento dell'uomo, si parla di ***controllo automatico.***
Dall'esempio svolto si può trarre una definizione generale di controllo di processo:

"Il controllo di processo è l'insieme delle operazioni che consentono ad una o più variabili fisiche del processo di assumere (a meno di un certo errore) dei valori desiderati (valori di riferimento), indipendentemente dalla presenza di sollecitazioni esterne al sistema, non controllabili, identificate come disturbi."

Sistemi lineari

Quella dei sistemi lineari è una categoria di sistemi molto diffusa, che presenta delle caratteristiche tali da renderne molto semplice lo studio. Rinunciando ad una definizione rigorosa, possiamo dire che un sistema è lineare se sono soddisfatte le seguenti due condizioni:

- esiste un legame di proporzionalità tra eccitazione e risposta;
- è applicabile il principio di sovrapposizione degli effetti.

Tale principio, estremamente utile, consente di determinare la risposta di un sistema sottoposto a diversi ingressi semplicemente componendo le risposte parziali che il sistema dà per ogni sollecitazione agente separatamente.
Applicare il principio di sovrapposizione degli effetti significa procedere come in Fig. 4.2.

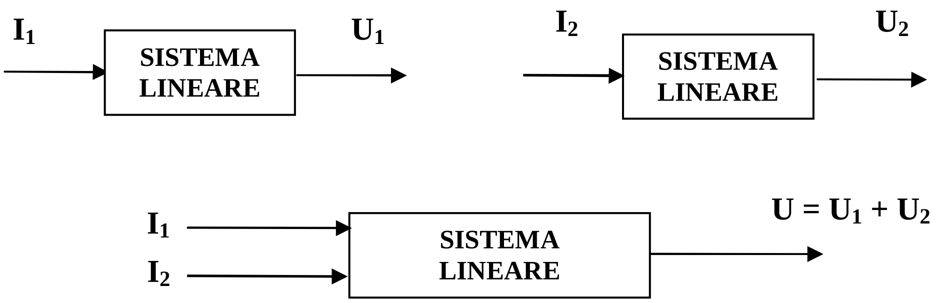


Fig. 4.2

Un sistema lineare a più ingressi può essere studiato come un insieme di sistemi ad un solo ingresso. Determinate le singole uscite parziali U_1 ed U_2 , applicando la sovrapposizione degli effetti si ottiene $U = U_1 + U_2$.
Nel nostro studio prenderemo in esame esclusivamente sistemi lineari.

Modelli

Un modello è un legame funzionale che lega fra loro le grandezze coinvolte nel funzionamento di un sistema e che consente di comprendere e predire l'evoluzione e le uscite del sistema stesso. Un esempio di modello è rappresentato dalla funzione di trasferimento di cui si parlerà nella prossima U.D. Il legame funzionale può essere di tipo analitico (Es.: regola del partitore), diagramma (Es.: caratteristica di un diodo), tabellare (Es.: tabella di verità di una porta AND), grafico (Es.: schema elettrico di un amplificatore). Avere il modello di un sistema significa poter studiare il sistema stesso sulla carta, senza cioè la necessità di averlo fisicamente a disposizione. E' però importante sottolineare un aspetto essenziale della questione. Il modello dà sempre una rappresentazione approssimata della realtà, per cui esso va validato con esperienze pratiche per sapere se approssima in modo accettabile il comportamento del sistema cui si riferisce. Se i risultati della validazione non dovessero essere soddisfacenti, si deve procedere ad una correzione che in molti casi comporta una complicazione della struttura del modello stesso.

U.D 2: DEFINIZIONE DELLA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO DI UN SISTEMA

La funzione di trasferimento di un sistema rappresenta il legame analitico tra ingresso ed uscita; indicando con *F(s)* tale legame, definiamo funzione di trasferimento il rapporto:

$$\boldsymbol{F(s) = U(s) / I(s)} \qquad (4.1)$$

cioè il rapporto tra la trasformata di Laplace della risposta *U(s)* e la trasformata di Laplace della sollecitazione *I(s). Tale definizione è valida nell’ipotesi di sistemi lineari.*
La funzione di trasferimento rappresenta il ***modello matematico di un sistema***; ciò significa che essa è in grado di ***descrivere il funzionamento del sistema*** evidenziando gran parte delle sue caratteristiche specifiche.

Determinazione delle funzioni di trasferimento per alcuni sistemi elettrici

Nel seguito prenderemo in esame solo sistemi elettrici e per essi determineremo l’espressione della funzione di trasferimento. Ricordiamo che la funzione di trasferimento è quella funzione che, moltiplicata per l'ingresso, ci dà l'uscita. E' importante precisare che la funzione di trasferimento, essendo una relazione matematica, può essere determinata per tutti i tipi di sistemi dei quali si conosca il modello (termici, meccanici, idraulici, pneumatici, ecc.).

a) circuito partitore resistivo

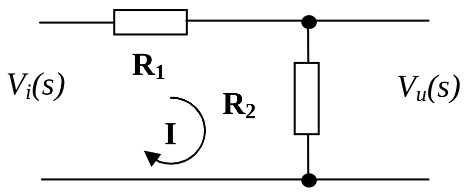


Fig. 4.3

Per esso $Vu = R_2 * I$; d’altra parte $I = V_i / (R_1 + R_2)$.
Sostituendo l’espressione della corrente nell’equazione di *Vu* si ottiene:

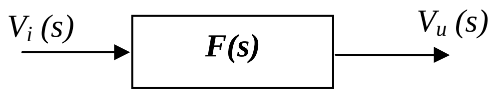
$Vu = R_2 * V_i / (R_1 + R_2)$; pertanto si ricava:

$$V_u = V_i * \frac{R_2}{(R_1 + R_2)} \qquad (4.2)$$

La 4.2 poteva anche essere ottenuta direttamente applicando quella che è conosciuta come ***"regola del partitore di tensione"***, che dice:

"La tensione di uscita di un partitore di tensione si ottiene moltiplicando la tensione di ingresso per la resistenza interessata e dividendo per la somma delle resistenze".

A livello di schema a blocchi il partitore di fig. 4.3 si rappresenta come segue



in cui $F(s) = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}$. (Questo è un caso particolare in cui la funzione di trasferimento è costante e non dipende quindi dalla variabile "s").

b) circuito RC

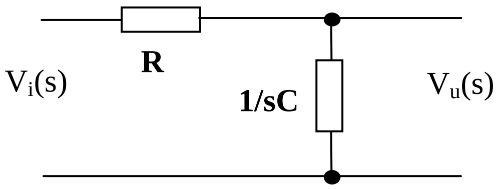
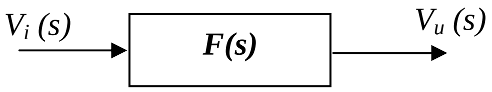


Fig. 4.4

Al circuito di Fig. 4.4 possiamo applicare le regola del partitore, a patto di considerare per il condensatore la sua impedenza Z_C.

$$V_u(s) = \frac{\frac{1}{sC}}{\left(R + \frac{1}{sC}\right)} * V_i(s) = \frac{1}{(sRC+1)} * V_i(s) \qquad (4.3)$$

A livello di schema a blocchi il circuito *RC* si rappresenta come segue



in cui $F(s) = \frac{1}{sRC+1}$.

c) circuito CR

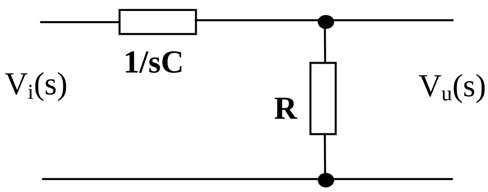
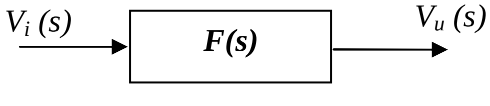


Fig. 4.5

Applicando la regola del partitore, ricaviamo subito il legame tra $V_u(s)$ e $V_i(s)$:

$$V_u(s) = \frac{R}{R + \frac{1}{sC}} * V_i(s) = \frac{sRC}{sRC+1} * V\ i(s) \qquad (4.4)$$

A livello di schema a blocchi il circuito C*R* si rappresenta come segue



in cui $F(s) = \frac{sRC}{sRC+1}$.

d) circuito RL

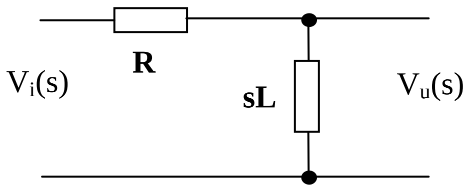
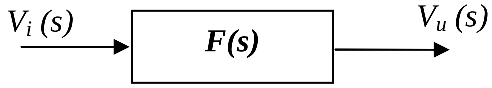


Fig. 4.6

Applicando la regola del partitore, ricaviamo subito il legame tra $V_u(s)$ e $V_i(s)$:

$$\boldsymbol{V_u(s) = \frac{sL}{(sL+R)} * V_i(s)} \qquad (4.5)$$

A livello di schema a blocchi il circuito *RL* si rappresenta come segue



in cui $F(s) = \dfrac{sL}{sL+R}$.

e) circuito LR

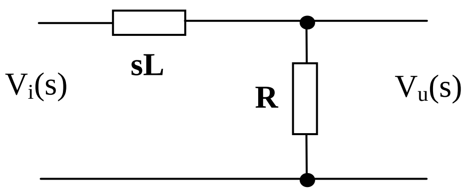
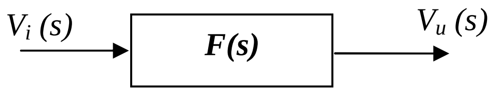


Fig. 4.7

Applicando la regola del partitore, ricaviamo subito il legame tra $V_u(s)$ e $V_i(s)$:

$$\boldsymbol{V_u(s) = \frac{R}{(sL+R)} * V_i(s)} \qquad (4.6)$$

A livello di schema a blocchi il circuito *LR* si rappresenta come segue



in cui $F(s) = \dfrac{R}{sL+R}$.

f) circuito RLC

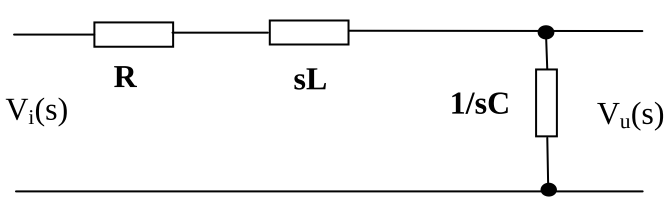


Fig. 4.8

Applicando la regola del partitore, ricaviamo il legame tra $V_u(s)$ e $V_i(s)$.

$$V_u(s) = \frac{\frac{1}{sC}}{\left(R + sL + \frac{1}{sC}\right)} * V_i(s) = \frac{1}{\left(sRC + s^2LC + 1\right)} * V_i(s) = \frac{1}{\left(s^2LC + sRC + 1\right)} * V_i(s) \quad (4.7)$$

A livello di schema a blocchi il circuito RLC si rappresenta come segue

$$V_i\,(s) \longrightarrow \boxed{\;F(s)\;} \longrightarrow V_u\,(s)$$

in cui $F(s) = \dfrac{1}{s^2LC + sRC + 1}$.